INVARIANTEN HERMITESCHER FORMEN ÜBER SCHIEFKÖRPERN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Hans-Jochen Bartels
aus Göttingen

Göttingen 1974

INVARIANTEN HERMITESCHER FORMEN ÜBER SCHIEFKÖRPERN

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Hans-Jochen Bartels
aus Göttingen

Göttingen 1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

D 7

Referent: Prof. Dr. M. Kneser

Korreferent: Prof. Dr. M. Deuring

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Mai 1974

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Einleitung		I-IV
§1	Räume von Bilinearformen nach Tits	1
§2	Cliffordalgebren nach Tits	5
§3	Grundkörpererweiterungen	6
§4	Spingruppen	8
§5	Orthogonale Summen	15
§6	Die Klasse von D in der Brauergruppe	19
§7	Die Invariante $c(q_1,q_2)$	21
§8	Schiefhermitesche Formen über algebraischen Zahlkörpern	32
Literaturverzeichnis		

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage der Klassifikation schiefhermitescher Formen über algebraischen Zahlkörpern K, genauer: über Quaternionenschiefkörpern D, deren Zentren K endlich algebraisch über dem Körper der rationalen Zahlen sind. Als Hilfsmittel für die Klassifikation wird Galoiskohomologie benutzt.

Die entsprechende Frage in der lokalen Situation läßt sich vollständig beantworten: Für schiefhermitesche Formen über $\mathbb{R}$ oder über $\mathfrak{p}$-adischen Körpern $K_{\mathfrak{p}}$ liefern Diskriminante und Dimension ein vollständiges Invariantensystem und man kann überdies alle anisotropen Räume explizit aufzählen (vgl. [J] , [Ts]). Bei der Übertragung der lokalen Ergebnisse auf die globale Situation stößt man auf Schwierigkeiten: Ist D zentrale Divisionsalgebra über K mit Standardinvolution δ über K, h nichtausgeartet schiefhermitesch über (D,δ) und U(h) die unitäre Gruppe zur Form h, so ist folgendes bekannt: Für schiefhermitesche Formen gilt nicht das Hasseprinzip, d.h. die natürliche Abbildung

$$w : H^1(K, U(h)) \to \prod_v H^1(K_v, U(h))$$

ist nicht injektiv, man weiß genauer, daß je 2^{s-2} Elemente aus $H^1(K, U(h))$ das gleiche Bild unter w haben, wenn D an genau s Stellen v nicht zerfällt [K] . Über algebraischen Zahlkörpern sind Dimension und Diskriminante kein vollständiges

bietet es sich an, im Hinblick auf die Situation, wie man sie bei gewöhnlichen quadratischen Formen findet, ein kohomologisches Analogon der Hasse-Witt-Invariante zu verwenden. Dazu seien SU(h) bzw. Spin (h) die spezielle unitäre Gruppe bzw. die Spingruppe zur Form h. Die Isomorphieklassen von schiefhermiteschen Formen über D einer festen Dimension werden durch die Kohomologiemenge $H^1(K, U(h))$ beschrieben. Aus der kurzen exakten Sequenz

$$1 \to SU(h)_{K_{sep}} \to U(h)_{K_{sep}} \to \mathbf{Z}_2 \to 1$$

ergibt sich folgende exakte Kohomologiesequenz:

$$1 \to SU(h)_K \to U(h)_K \to \mathbf{Z}_2 \to H^1(K,SU(h)) \to H^1(K,U(h)) \to H^1(K,\mathbf{Z}_2).$$

Man überlegt sich, daß die Abbildung $H^1(K,U(h)) \to H^1(K,\mathbf{Z}_2)$ im wesentlichen die Diskriminantenabbildung ist, und daß bei der Abbildung $H^1(K, SU(h)) \to H^1(K,U(h))$ jede Faser aus genau zwei Elementen besteht. Damit entpsrechen den K-Isomorphieklassen von Formen fester Dimension und vorgeschriebener Diskriminante zwei Elemente in $H^1(K, SU(h))$. Mittels

$$1 \to \mathbf{Z}_2 \to \text{Spin } (h)_{K_{sep}} \to SU(h)_{K_{sep}} \to 1$$

und der zugehörigen Randabbildung $H^1(K, SU(h)) \to H^2(K, \mathbf{Z}_2)$ gelangt man so zu zwei Elementen etwa c_1 und c_2 in $H^2(K, \mathbf{Z}_2)$. $H^2(K, \mathbf{Z}_2)$ kann mit den Elementen der Ordnung zwei in der Brauergruppe identifiziert werden, $|D|$ bezeichne die durch D in $H^2(K,\mathbf{Z}_2)$ bestimmte Klasse.

Für beliebige Grundkörper K der Charakteristik ungleich zwei und beliebige Divisionsalgebren $D \neq K$ mit einer Involution δ erster Art über K wird in § 7 gezeigt:

Satz 3: $\quad c_1 \cdot c_2 = |D|$

Damit hat man zu irgendzwei schiefhermiteschen Formen h, h_1 (bzw. in der allgemeineren Situation, wie sie in § 7 behandelt wird, für beliebige nichtausgeartete quadratische Formen im Sinne von [T]) mit gleicher Diskriminante und Dimension eine Invariante $c = c(h, h_1)$ in $H^2(K, \mathbb{Z}_2) / (|D|)$.
Für diese Invariante gelten gewisse Rechenregeln (§ 7, 7.2 Satz 4), und man kann mit Hilfe von $c(h, h_1)$ eine Invariante auf der Wittgruppe konstruieren, die nur vom Typ des betreffenden Raumes in der Wittgruppe abhängt (§ 7, 7.2).
Ist jetzt K algebraischer Zahlkörper, so hat die natürliche Abbildung

$$H^2(K, \mathbb{Z}_2) / (|D|) \quad \rightarrow \quad \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}_2) / (|D_v|)$$

einen Kern von der Ordnung 2^{s-2}, wo s wieder die Anzahl der Stellen v ist, für die $D_v \neq M_2(K_v)$ ist. Hierzwischen und der Gleichung $\#\ker w = 2^{s-2}$ besteht ein direkter Zusammenhang (§ 8,8.1), der zugleich die Ungültigkeit des Hasse-Prinzps von dieser Seite besser verstehen läßt. Im Hinblick auf die Frage der Klassifikation wird in § 8, 8.2 folgender Satz bewiesen:

Satz 5: Ist h nichtausgeartet schiefhermitesch und haben die schiefhermiteschen Formen h_1, h_2 gleiche Dimension und Diskriminante wie h und ist $c(h, h_1) = c(h, h_2)$, so gilt: h_1 und h_2 sind genau dann über D isomorph, wenn h_1 und h_2 über D_v isomorph sind für alle unendlichen Primstellen v von K.

Diese Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

In dem ersten vorbereitenden Teil (§ 1 bis § 6) werden Spingruppen allgemeiner quadratischer Formen im Sinne von [T] als K-Formen von Spingruppen gewöhnlicher quadratischer Formen eingeführt. Dabei wird eine auf J. Tits zurückgehende Konstruktion von K-Formen der zweiten Cliffordalgebra von quadratischen Formen benutzt, einiges hierüber ist in § 2 zusammengestellt. § 7 beschäftigt sich mit der Konstruktion und den allgemeinen Eigenschaften des kohomologischen Analogons der Hasse-Witt-Invariante. Im letzten Teil (§ 8) werden dann schiefhermitesche Formen über algebraischen Zahlkörpern behandelt. Dabei werden einige Ergebnisse von M.Kneser über die Galoiskohomologie klassischer Gruppen verwendet ([K]), wie sich überhaupt die Sprechweise dieser Arbeit in § 8 an [K] anlehnt und § 7 Satz 3 und § 8 Satz 5 auch in dieser Form von M.Kneser vermutet wurden.

Für die Anregung und die zahlreichen Hinweise bei der endgültigen Formulierung dieser Arbeit bin ich Herrn Prof.M.Kneser zu großem Dank verpflichtet.

§ 1 Räume von Bilinearformen nach Tits

K sei beliebiger Grundkörper. Ist E zentrale einfache Algebra der Dimension n^2 über K und $\sigma : E \to E$ eine Involution erster Art über K (d.h. σ läßt $K \subset E$ elementweise fest), so heißt σ vom symmetrischen Typ, wenn

$\dim \{e \in E \mid e^\sigma = e\} = \frac{n(n+1)}{2}$ ist. Andernfalls ist σ vom alternierenden Typ.

Definition 1: Ein Raum von Bilinearformen $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ über K besteht aus

(i) einer zentralen einfachen Algebra E über K, so daß E isomorph zur opponierten Algebra E^{op} ist,

(ii) einem freien Rechts-E-Modul B vom Rang $\neq 1$ über E,

(iii) einem K-Isomorphismus $\pi : B \to B$, für den es ein erzeugendes Element s des E-Moduls B und eine Involution σ erster Art von E vom symmetrischen Typ gibt, so daß

$$\pi(se) = se^\sigma \qquad \text{für } e \in E \text{ gilt.}$$

Definition 2: $\mathfrak{B}_1 = (B_1, E_1, \pi_1)$ und $\mathfrak{B}_2 = (B_2, E_2, \pi_2)$ seien Räume von Bilinearformen über K. Ein Morphismus $f = (f_B, f_E)$ von $\mathfrak{B}_1$ nach $\mathfrak{B}_2$ besteht aus zwei K-Isomorphismen $f_B : B_1 \to B_2$, $f_E : E_1 \to E_2$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\pi_2 \cdot f_B = f_B \cdot \pi_1$

(ii) $f_B(be) = f_B(b) \cdot f_E(e)$ für $b \in B$, $e \in E$.

Ist $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ Raum von Bilinearformen über K, so wird durch

$$\pi (e^* \cdot b) = \pi (b) \cdot e \qquad \text{für } b \in B,\ e \in E$$

auf B eine E^{op}-Modulstruktur erklärt, e^* bezeichnet dabei das e entsprechende Element von E^{op}. Für $e \in E$ und $b \in B$ setzt man

$$b^e = e^* \cdot b \cdot e \ .$$

Weiter bezeichnet $A := \{b - \pi (b) \mid b \in B\}$ die Teilmenge der alternierenden Formen von B und $Q := {}^{B}/_{A}$ die zu $\mathfrak{B}$ gehörige Menge der quadratischen Formen.

$b \in B$ heißt nichtausgeartet, wenn b erzeugendes Element des E-Moduls B ist. $q = \bar{q} + A \in Q$ heißt nicht ausgeartet, falls $\beta (q) := \bar{q} + \tau(\bar{q}) \in B$ nicht ausgeartet ist.

GL (E) sei die Gruppe der invertierbaren Elemente von E und für $q = \bar{q} + A \in Q$ und $x \in GL (E)$ wird

$$q^x := \bar{q}^x + A = x^* \cdot \bar{q} \cdot x + A \qquad \text{gesetzt,}$$

das ist sinnvoll, weil $x^* A x = A$ ist.

Ist $q \in Q$ nicht ausgeartet, so wird mit $U = U (q)_K$ die unitäre Gruppe zur Form q bezeichnet:

$$U (q)_K := \{x \in GL (E) \mid q^x = q\} \ .$$

Beispiel: Ist D Divisionsalgebra mit Zentrum K und von endlicher Dimension über K, $\delta : D \to D$ Involution erster Art über K, so werde $\varepsilon = +1$ bzw. -1 gesetzt, je nachdem δ von symmetrischen bzw. vom alternierenden Typ ist. Ist V endlichdimensionaler Rechtsvektorraum über D, so ist die Menge $E = End_D V$ der D-Endomorphismen von V zentrale einfache K-Algebra endlicher Dimension über K. $B := Sesq_\delta V$

bezeichne den Raum der δ-Sesquilinearformen, d.h. der biadditiven Abbildungen $b : V \times V \to D$ mit

$$b(x\,d, y\,d') = d^{\delta}\, b(x, y)\, d' \qquad (d, d' \in D) .$$

$\pi : B \to B$ wird durch

$$\pi(b)(x, y) := \varepsilon\, b(y, x)^{\delta} \qquad \text{definiert.}$$

Durch $(b\,e)(x, y) := b(x, e\,y)$ wird B zu einem E-Rechtsmodul und $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ ist Raum von Bilinearformen im Sinne von Definition 1.

Nach [T] (S. 20) gibt es andererseits zu gegebener einfacher zentraler Algebra E endlicher Dimension über K mit $E \cong E^{op}$ bis auf Isomorphie nur einen Raum von Bilinearformen $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ über K. Daher ist bis auf Isomorphie jeder Raum $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ von dem in diesem Beispiel betrachteten Typ.

Speziell für $D = K$, $\delta = id$ hat man mit $B = Bil\ V$ den Raum der gewöhnlichen Bilinearformen auf V.

Jeder D-Vektorraumautomorphismus $\alpha : V \to V$ induziert einen Morphismus $f = (f_B, f_E)$ des zu (V, D, δ) gehörigen Raumes von Bilinearformen vermöge

$$f_E(e) := \alpha^{-1} \cdot e \cdot \alpha$$

$$f_B(b)(x, y) := (\alpha^{*} \cdot b \cdot \alpha)(x, y) = b(\alpha(x), \alpha(y)) .$$

Allgemein gilt:

Lemma 1: Ist $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ ein beliebiger Raum von Bilinearformen über K und $f = (f_B, f_E) : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ Automorphismus von $\mathfrak{B}$, so gibt es invertierbare Elemente $c \in E$, $k \in K$, so daß

$$f_B(b) = k\, c^{*} \cdot b \cdot c \quad \text{und} \quad f_E(e) = c^{-1} \cdot e \cdot c$$

gelten für $b \in B$, $e \in E$. c ist bis auf einen skalaren Faktor $t \in K$ eindeutig bestimmt, zu $t \cdot c$ gehört dann $t^{-2} \cdot k$. Umgekehrt wird durch diese Gleichungen für irgend zwei invertierbare $c \in E$, $k \in K$ ein Automorphismus von $\mathfrak{B}$ definiert. Ist q nichtausgeartete quadratische Form in $\mathfrak{B}$, so induziert insbesondere jedes $\alpha \in U(q)_K$ einen Morphismus von $\mathfrak{B}$. Falls jedes invertierbare Element von K Quadrat in K ist, wird jeder beliebige Automorphismus f von $\mathfrak{B}$, der q festläßt, durch ein $\alpha \in U(q)_K$ gegeben.

Beweis: Daß bei vorgegebenem c, k durch die angegebenen Gleichungen wirklich ein Automorphismus von $\mathfrak{B}$ definiert wird, ergibt sich durch Nachrechnen. Dies ist die allgemeine Form eines Automorphismus $f = (f_B, f_E)$, denn: f_E ist Automorphismus einer zentralen einfachen Algebra, deswegen existiert ein invertierbares $c \in E$, so daß

$$f_E(e) = c^{-1} \cdot e \cdot c \qquad \text{für } e \in E \text{ ist.}$$

Nötigenfalls kann man durch Komposition mit dem durch c^{-1} definierten Morphismus $f_E = id_E$ erreichen, und nach [T] (S. 21) sind die einzigen mit π verträglichen E-Modulautomorphismen f_B die Homothetien auf B und damit folgt die Behauptung.

§ 2 Cliffordalgebren nach Tits

$\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ sei Raum von Bilinearformen über K und $q = \bar{q} + A$ quadratische Form in $\mathfrak{B}$. $B' := \mathrm{Hom}_K(B, K)$ sei der zu B duale K-Vektorraum, $\mathfrak{T}(B')$ die zu B' gehörige Tensoralgebra. Nach [T] (S. 31) wird durch $\mathfrak{C}(q) = \mathfrak{T}(B')/_I$ mit einem geeignet definierten Ideal I in $\mathfrak{T}(B')$, das von q abhängt, eine verallgemeinerte zweite Cliffordalgebra zur Form q definiert.

$$f = (f_B, f_E) : \mathfrak{B}_1 = (B_1, E_1, \pi_1) \to \mathfrak{B}_2 = (B_2, E_2, \pi_2)$$

sei Morphismus zweier über K definierter Räume von Bilinearformen und $q_1 = \bar{q}_1 + A_1$ bzw. $q_2 = \bar{q}_2 + A_2$ quadratische Formen in $\mathfrak{B}_1$ bzw. $\mathfrak{B}_2$ mit $q_2 = f(q_1) = f_B(\bar{q}_1) + A_2$. f_B induziert einen Isomorphismus $(f_B)_*: B_2' \to B_1'$ und so erhält man in natürlicher Weise einen Isomorphismus der Tensoralgebren $\mathfrak{T}((f_B)_*) : \mathfrak{T}(B_2') \to \mathfrak{T}(B_1')$. Man rechnet nach, daß dabei das die Algebra $\mathfrak{C}(q_2)$ definierende Ideal in das zu $\mathfrak{C}(q_1)$ gehörige abgebildet wird, so daß f in kanonischer Weise einen K-Algebrenisomorphismus $\mathfrak{C}(f) : \mathfrak{C}(q_2) \to \mathfrak{C}(q_1)$ definiert. $\mathfrak{C}$ ist so kontravarianter Funktor von der Kategorie der Räume $\mathfrak{B}$ von Bilinearformen über K mit quadratischer Form q in die Kategorie der K-Algebren.

Wird speziell $\mathfrak{B}$ durch einen K-Vektorraum V gegeben (vgl. § 1, Beispiel mit D = K, δ = id), so daß $\mathfrak{B}$ = Bil V der Raum der gewöhnlichen Bilinearformen auf V ist, so kann

man B' mit V ⊗ V vermöge

$$\langle x \otimes y, b \rangle = b(x, y) \qquad \text{für } x, y \in V \quad b \in \text{Bil } V$$

identifiziert werden und für eine quadratische Form $q = \bar{q} + A$ ist $\mathcal{C}(q)$ so kanonisch isomorph der gewöhnlichen zweiten Cliffordalgebra $C^+(q)$ zur gewöhnlichen quadratischen Form $x \to \bar{q}(x, x)$ [T] (Théorème 2).

In diesem speziellen Fall stimmt $U(q)_K$ mit der orthogonalen Gruppe $O(q)_K$ zur gewöhnlichen quadratischen Form $x \to \bar{q}(x, x)$ überein. Jedes $\alpha \in O(q)_K$ induziert nach § 1 Lemma 1 einen Automorphismus f von $\mathfrak{B}$, der q festläßt, und damit einen Algebrenautomorphismus $\mathcal{C}(f)$ von $\mathcal{C}(q)$. Man rechnet nach, daß $\mathcal{C}(f)$ Fortsetzung der orthogonalen Transformation α auf die gewöhnliche zweite Cliffordalgebra $C^+(q)$ ist.

§ 3 Grundkörpererweiterungen

Ist L/K Körpererweiterung von K und $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ Raum von Bilinearformen über K, q quadratische Form in $\mathfrak{B}$, so erhält man durch Tensorierung

$$B \otimes_K L\ ,\ E \otimes_K L,\ \pi \otimes \mathrm{id},\ q \otimes 1 : = \bar{q} \otimes 1 + A \otimes_K L$$

einen Raum von Bilinearformen über L, der mit ${}_L\mathfrak{B} = ({}_LB, {}_LE, {}_L\pi)$ bezeichnet werde, sowie eine quadratische Form ${}_Lq = q \otimes 1$ in ${}_L\mathfrak{B}$.

Nach [T] (Théorème 2) ist die Konstruktion der Cliffordalgebren verträglich mit Grundkörpererweiterungen L/K, d.h. man hat einen Isomorphismus $\mathcal{C}({}_Lq) \cong \mathcal{C}(q) \otimes_K L$. Ist L/K galoissch mit Galoisgruppe G = Gal(L/K), so operiert G in natürlicher Weise auf ${}_LB$, ${}_LE$ und dann auch auf $\mathcal{C}({}_Lq)$. Sind dann $\mathfrak{B}_i = (B_i, E_i, \pi_i)$ (i = 1,2) Räume von Bilinearformen über K, q_i quadratische Formen in $\mathfrak{B}_i$ und $f : {}_L\mathfrak{B}_1 \to {}_L\mathfrak{B}_2$ ein Morphismus über L, der ${}_Lq_1$ in ${}_Lq_2$ abbildet, so hat man einen L-Algebrenisomorphismus

$$\mathcal{C}(f) : \mathcal{C}({}_Lq_2) \to \mathcal{C}({}_Lq_1).$$

Es ist nicht schwer nachzurechnen, daß mit den üblichen Abkürzungen

$${}^sf := s \circ f \circ s^{-1}, \quad {}^s\mathcal{C}(f) := s \circ \mathcal{C}(f) \circ s^{-1} \quad \text{für } s \in G$$

die folgende Gleichung richtig ist:

$$\mathcal{C}({}^sf) = {}^s\mathcal{C}(f).$$

Ist $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ über K definierter Raum von Bilinearformen mit nichtausgearteter quadratischer Form q, $\dim_K E = n^2$, so gibt es zunächst einen endlichen galoisschen Zerfällungskörper L/K von E, so daß ${}_LE$ isomorph zur n-reihigen Matrixalgebra $M_n(L)$ über L ist. Zu einer gegebenen einfachen zentralen Algebra, die isomorph zu ihrer opponierten Algebra ist, gibt es aber nach [T] (S. 20) bis auf Isomorphie nur einen Raum von Bilinearformen. Und da irgendzwei gewöhnliche nichtausgeartete quadratische Formen gleicher Dimension nach [Sp] (Lemma 2.1) über einer geeigneten endlichen galoisschen Erweiterung des Definitionskörpers äquivalent sind, folgt so:

Lemma 2: Sind für i = 1,2 $\mathfrak{B}_i = (B_i, E_i, \pi_i)$ Räume von Bilinearformen über K mit $\dim_K E_1 = \dim_K E_2$ und q_i nichtausgeartete quadratische Formen in $\mathfrak{B}_i$, so gibt es einen endlichen galoisschen Erweiterungskörper L von K und einen über L definierten Morphismus $f : {}_L\mathfrak{B}_1 \to {}_L\mathfrak{B}_2$ mit $f({}_Lq_1) = {}_Lq_2$.

§ 4 Spingruppen

Dieser Paragraph beschäftigt sich mit speziellen unitären Gruppen SU(q) und Spingruppen Spin (q) nichtausgearteter quadratischer Formen q. Dabei wird ein anderer Weg als in [T] eingeschlagen:
Es interessiert hier nicht nur die Existenz der universellen Überlagerung Spin (q) der algebraischen Gruppe SU (q). Um in H^1 (K, Spin (q)) rechnen zu können, ist eine explizitere Beschreibung notwendig. Im ersten Abschnitt werden die hier interessierenden Eigenschaften von Spingruppen gewöhnlicher quadratischer Formen zusammengestellt, die dann im zweiten Abschnitt für die Definition und den Nachweis der entsprechenden Eigenschaften von Spingruppen beliebiger quadratischer Formen im Sinne von § 1 benutzt werden. Da man sich hier nicht so sehr für den klassischen Fall gewöhnlicher quadratischer Formen interessiert, wird in § 4 stets gerade Dimension n = 2m vorausgesetzt ($n^2 = \dim_K E$).

4.1)

V sei K-Vektorraum gerader Dimension n über K, $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ der nach § 1 zu V gehörige Raum von Bilinearformen und $q = \bar{q} + A \in Q$ sei nichtausgeartete quadratische Form. Wie in § 2 wird B' mit $V \otimes_K V$ und so $\mathcal{A}(q)$ mit der gewöhnlichen zweiten Cliffordalgebra $C^+(q)$ zur Form q identifiziert. $\iota : C(q) \to C(q)$ bezeichne den kanonischen Antiautomorphismus auf der Cliffordalgebra C (q) von q. Dann wird als spezielle unitäre Gruppe $SU(q)_K$ zur Form q definiert:[1.)]

$$(1) \qquad SU(q)_K := \{x \in U(q)_K \mid x \text{ induziert auf dem Zentrum von } \mathcal{A}(q) \text{ die Identität}\}$$

Bemerkung: Man kann zeigen, daß für Char K ≠ 2

$$SU(q)_K = \{x \in U(q)_K \mid \det x = 1\} .$$

Spin $(q)_K$ sei die zu q gehörige Spingruppe, genauer: die Menge der geometrischen Punkte der affinen algebraischen Gruppe Spin (q) mit Werten in dem Grundkörper K, also:

$$\text{Spin } (q)_K = \{x \in GL(\mathcal{A}(q)) \mid x V x^{-1} \subseteq V \text{ und } x x^{\iota} = 1\} .$$

Durch $v \mapsto x v x^{-1} = \rho(x)(v)$ für $v \in V$ definiert jedes $x \in \text{Spin } (q)_K$ ein $\rho(x) \in SU(q)_K$ und man hat so einen Homomorphismus $\rho : \text{Spin } (q)_K \to SU(q)_K$.

1.) Anmerkung: An dieser Stelle wird wesentlich n = 2m benutzt!

Lemma 3: Sind für i = 1,2 V_i K-Vektorräume und $\mathfrak{B}_i = (\mathrm{Bil}\ V_i, \mathrm{End}_K V_i, \tau_i)$ die zugehörigen Räume von Bilinearformen, $q_i \in Q_i$ nichtausgeartete quadratische Formen in $\mathfrak{B}_i$ und $f: \mathfrak{B}_1 \longrightarrow \mathfrak{B}_2$ irgendein Morphismus mit $f(q_1) = q_2$, so gilt:

(i) $\mathcal{U}(f)\ \mathrm{Spin}(q_2)_K = \mathrm{Spin}(q_1)_K$

(ii) Der Isomorphismus $\mathrm{Spin}(q_2)_K \longrightarrow \mathrm{Spin}(q_1)_K$ ist verträglich mit den Homomorphismen $\mathrm{Spin}(q_i)_K \longrightarrow \mathrm{SU}(q_i)_K$.

Beweis: Ist K algebraisch abgeschlossen, so wird f durch einen Isomorphismus $\varphi: (V_2, q_2) \longrightarrow (V_1, q_1)$ induziert (vgl. §1 Lemma 1) und (i) und (ii) sind richtig. Der allgemeine Fall läßt sich durch Grundkörpererweiterung auf den eben betrachteten zurückführen.

4.2)

D, δ, V und $\mathfrak{B} = (B, E, \tau)$ mit $B = \mathrm{Sesq}_\delta V$, $E = \mathrm{End}_D V$ seien wie in §1 Beispiel. Zusätzlich wird $\dim_K D > 1$ vorausgesetzt, dann ist $n = (\dim_K E)^{1/2}$ notwendig gerade. $q = \bar{q} + A$ sei nichtausgeartete quadratische Form. Genauso wie in 4.1) Gleichung (1) wird $\mathrm{SU}(q)_K$ definiert.

Für Char K ≠ 2 kann man dann beweisen, daß

$$\mathrm{SU}(q)_K = \{ x \in \mathrm{U}(q)_K \mid \mathrm{Nrd}\ x = 1 \} \quad \text{ist,}$$

dabei ist Nrd die reduzierte Norm auf E.

Ist jetzt V_1 irgendein K-Vektorraum mit $\dim V_1 = n$ und q_1 irgendeine gewöhnliche nichtausgeartete quadratische Form auf V_1, $\mathfrak{B}_1$ der durch V_1 definierte Raum von Bilinearformen über K, so hat man nach § 3 Lemma 2 eine endliche galoissche Erweiterung L von K und einen über L definierten Zerfällungsmorphismus $f : {}_L\mathfrak{B} \to {}_L\mathfrak{B}_1$, der ${}_Lq$ in ${}_Lq_1$ abbildet.

K_{sep} sei ein separabler und $\overline{K}$ ein algebraischer Abschluß von K mit $K \subset K_{sep} \subset \overline{K}$. Die durch Konstantenerweiterung aus f erhaltenen Morphismen

$$K_{sep}\mathfrak{B} \to K_{sep}\mathfrak{B}_1 \quad , \quad \overline{K}\mathfrak{B} \to \overline{K}\mathfrak{B}_1$$ werden der

Einfachheit wegen wieder mit f bezeichnet. Schließlich bezeichnet für algebraische Erweiterungen K' von K $\mathrm{Spin}\,(q_1)_{K'}$ die Menge der geometrischen Punkte von $\mathrm{Spin}\,(q_1)$ mit Werten in K'. Dann gilt:

Satz 1:

(i) Durch $\mathrm{Spin}\,(q)_{\overline{K}} := \mathfrak{A}(f)\ (\mathrm{Spin}\,(q_1)_{\overline{K}})$ wird eine affine algebraische K-Gruppe Spin (q) definiert.

(ii) Spin (q) ist unabhängig von der speziellen Wahl von L und f und heißt die zur Form q gehörige Spingruppe.

Beweis:

Zu (ii): Ist neben f $\quad f' : \overline{K}\mathfrak{B} \to \overline{K}\mathfrak{B}_2$ ein zweiter Zerfällungsmorphismus und $q_2 = f'(q)$, so hat man nach 4.1 Lemma 3 (i)

$$\alpha(f' \cdot f^{-1})\ (\mathrm{Spin}\ (q_2)_{\overline{K}}) = \mathrm{Spin}\ (q_1)_{\overline{K}}$$

und damit

$$\alpha(f')\ (\mathrm{Spin}\ (q_2)_{\overline{K}}) = \alpha(f)\ (\mathrm{Spin}\ (q_1)_{\overline{K}})\ .$$

Zu (i): $\alpha(f)$ ist über L definiert und daher ist $\mathrm{Spin}\ (q)_K$ jedenfalls eine über L und damit erst recht über K_{sep} definierte algebraische Menge in $\alpha(_{\overline{K}}q)$, $\mathrm{Spin}\ (q)_{\overline{K}}$ kann als die Menge der geometrischen Punkte einer zunächst nur über L definierten linearen algebraischen Gruppe Spin (q) mit Werten in $\overline{K}$ betrachtet werden. Die algebraische Gruppe Spin (q) ist sogar über K definiert, denn für $s \in \mathrm{Gal}\ (K_{sep}/K)$ hat man nach dem zuerst Gezeigten:

$$\alpha({}^{s}f)\ (\mathrm{Spin}\ (q_1)_{K_{sep}}) = \alpha(f)\ (\mathrm{Spin}\ (q_1)_{K_{sep}})$$

und deswegen

$${}^{s}(\mathrm{Spin}\ (q)_{K_{sep}}) = \mathrm{Spin}\ (q)_{K_{sep}}\ .$$

$\mathrm{Spin}\ (q)_{\overline{K}}$ ist daher als algebraische Menge über K definiert. Die Invarianz der Multiplikations- bzw. Inversenabbildung auf $\mathrm{Spin}\ (q)_{K_{sep}}$ unter Automorphismen der Galoisgruppe folgt ähnlich einfach.

Ist L/K algebraische Körpererweiterung, so bezeichne ganz allgemein ${}_{L}G$ die durch Konstantenerweiterung aus der affinen algebraischen K-Gruppe G entstandene L-Gruppe. Für die galoisschen Erweiterungen L nach § 3 Lemma 2 hat man dann

$$
\begin{array}{ccc}
L^{U}(q) & \cong & L^{U}(q_1) \\
L^{SU}(q) & \cong & L^{SU}(q_1) \qquad \text{und durch} \\
L^{Spin}(q) & \longrightarrow & L^{Spin}(q_1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
L^{SU}(q) & \longrightarrow & L^{SU}(q_1) \qquad \text{wird ein}
\end{array}
$$

zunächst nur über L definierter Morphismus von Spin (q) nach SU (q) erklärt. Mit der Abkürzung

$$\mu_2(\overline{K}) := \{x \in \overline{K} \mid x^2 = 1\} \qquad \text{hat man}$$

Satz 2:

(i) Der Morphismus Spin (q) → SU (q) ist über K definiert und unabhängig von der Wahl des Zerfällungsmorphismus f.

(ii) Spin (q) → SU (q) ist verträglich mit Morphismen.

(iii) Man hat eine exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to \mu_2(\overline{K}) \to \mathrm{Spin}(q)_{\overline{K}} \to \mathrm{SU}(q)_{\overline{K}} \to 1 \ .$$

Ist Char K ≠ 2, so ist dies schon für K_{sep} anstelle von $\overline{K}$ richtig.

Beweis: Nach 4.1 Lemma 3 (ii) ist $\mathrm{Spin}(q)_{\overline{K}} \to \mathrm{SU}(q)_{\overline{K}}$ unabhängig von der speziellen Wahl von f und damit folgt auch sofort die Invarianz von $g : \mathrm{Spin}(q)_{K_{sep}} \to \mathrm{SU}(q)_{K_{sep}}$ unter Automorphismen der Galoisgruppe und damit ist (i) bewiesen.

(ii) und (iii) ergeben sich jeweils aus den entsprechenden Eigenschaften gewöhnlicher Spingruppen.

Später wird noch folgendes Lemma benötigt:

Lemma 4: Sei $\alpha \in SU(q)_{K_{sep}}$ und ϕ der durch α induzierte Morphismus von $K_{sep}^{\mathcal{B}}$, $c \in Spin(q)_{K_{sep}}$ liege über α bei $Spin(q)_{K_{sep}} \to SU(q)_{K_{sep}}$. Dann ist $\mathcal{A}(\phi)$ innerer Automorphismus mit dem Element $c \in Spin(q)_{K_{sep}}$.

Beweis: Wie in den Sätzen 1,2 sei $f = (f_B, f_E): K_{sep}^{\mathcal{B}} \to K_{sep}^{\mathcal{B}}$ 1 Zerfällungsmorphismus. Für $b \in K_{sep} B_1$ hat man

$$f_B \cdot \phi_B \cdot f_B^{-1}(b) = f_B(\alpha^* \cdot f_B^{-1}(b) \cdot \alpha) = f_E(\alpha)^* \cdot b \cdot f_E(\alpha),$$

der Morphismus $f \circ \phi \circ f^{-1}$ wird von der speziellen orthogonalen Transformation $f_E(\alpha)$ induziert, $\mathcal{A}(f \circ \phi \circ f^{-1})$ ist daher innerer Automorphismus mit $\mathcal{A}(f)^{-1}(c)$ und daraus folgt die Behauptung.

§ 5 Orthogonale Summen

D, δ seien wie in § 1 Beispiel, V_i (i = 1,2) seien D-Rechtsvektorräume, $\mathfrak{B}_i = (B_i, E_i, \pi_i)$ die zugehörigen Räume von Bilinearformen über K, $q_i = \overline{q}_i + A_i$ quadratische Formen in $\mathfrak{B}_i$. Mit $\overline{q}_1 \perp \overline{q}_2$ wird die durch die orthogonale Summe der Sesquilinearformen $\overline{q}_i$ auf $V = V_1 \perp V_2$ gegebene Sesquilinearform bezeichnet und durch $q_1 \perp q_2 := \overline{q}_1 \perp \overline{q}_2 + A$ eine quadratische Form in $\mathfrak{B}$ definiert, $q_1 \perp q_2$ ist unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten $\overline{q}_i$ in q_i. $q_1 \perp q_2$ ist nichtausgeartet genau dann, wenn q_1 und q_2 es sind. Das wird im folgenden stets vorausgesetzt.

Ist speziell D = K, δ = id, so daß der klassische Fall gewöhnlicher quadratischer Formen vorliegt, so bezeichnen $C(q_1 \perp q_2)$, $C(q_i)$ (i = 1,2) die zu $q_1 \perp q_2$ bzw. q_i gehörigen gewöhnlichen Cliffordalgebren. Bettet man V_1 in natürlicher Weise in $V_1 \perp V_2$ ein, so gilt für $x \in V_1$ in der Cliffordalgebra: $x^2 = \overline{q}(x,x) \cdot 1$ mit $\overline{q} = \overline{q}_1 \perp \overline{q}_2$. Daher gibt es genau einen K-Algebrenhomomorphismus $C(q_1) \to C(q_1 \perp q_2)$, so daß

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \longrightarrow & V = V_1 \perp V_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(q_1) & \longrightarrow & C(q_1 \perp q_2) \end{array}$$

kommutativ wird.

Bei diesem Algebrenhomomorphismus wird die zur Form q_1 gehörige Spingruppe $\mathrm{Spin}(q_1)_K$ in die zu $q_1 \perp q_2$ gehörige

Spingruppe Spin $(q_1 \perp q_2)_K$ abgebildet. Sind die Dimensionen von V_i gerade - nur hierfür hatten wir SU (q_i) definiert - , so hat man eine Injektion SU $(q_1)_K \to$ SU $(q_1 \perp q_2)_K$, indem man jedes $\alpha \in$ SU $(q_1)_K$ auf dem Orthokomplement V_2 von V_1 in V durch die Identität fortsetzt und insgesamt ergibt sich so ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin } (q_1)_K & \longrightarrow & \text{Spin } (q_1 \perp q_2)_K \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{SU } (q_1)_K & \longrightarrow & \text{SU } (q_1 \perp q_2)_K \end{array} .$$

Das kann auf Spingruppen beliebiger quadratischer Formen q_i mit $\dim_K D > 1$ übertragen werden. Dabei ist aber zu beachten, daß nach § 2 $\mathcal{Q}$ als kontravarianter Funktor aufgefaßt werden kann, und da Spin $(q_1)_K \to$ Spin $(q_1 \perp q_2)_K$ kein Isomorphismus ist, geht die Übertragung auf den Fall beliebiger quadratischer Formen nicht so glatt wie die entsprechende in § 4, 4.2.

$\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ bezeichnet den durch $V = V_1 \perp V_2$ definierten Raum von Bilinearformen über K. Indem man jedes $e_1 \in E_1 = \text{End}_D V_1$ durch die Identität auf V_2 auf ganz $V = V_1 \perp V_2$ fortsetzt, hat man Homomorphismen $E_1 \to E$, SU $(q_1)_K \to$ SU $(q_1 \perp q_2)_K$. Nach Wahl von D-Basen der Rechtsvektorräume V_i $(i = 1,2)$ entsprechen den Sesquilinearformen $b \in B$ (bzw. B_i) und den Endomorphismen $e \in E$ (bzw. E_i) quadratische Matrizen (b_{ik}) bzw. (e_{ik}) mit Koeffizienten b_{ik} bzw. e_{ik} in D. Ist L genügend großer endlicher galoisscher Zerfällungskörper von D und $\varphi : D \otimes K_{sep} \to M_d (K_{sep})$ über L definierter Zerfällungsmorphismus, so wähle man als Zerfällungsmorphismus g bzw. g_i

von E bzw. E_i : $g(e_{\nu\mu}) := (\varphi(e_{\nu\mu}))$ bzw. $g_i(e_{\nu\mu}) = (\varphi(e_{\nu\mu}))$. Zu den g_i konstruiert man sich Zerfällungsmorphismen f_i von $\mathfrak{B}_i$, so daß $f_i(q_i)$ gewöhnliche über K definierte quadratische Formen sind (vgl. § 3 Lemma 2). Mit nicht allzu schwerer aber umständlich expliziter Rechnung prüft man nach: Mit den f_i läßt sich ein Zerfällungsmorphismus f von $\mathfrak{B}$ geeignet so konstruieren, daß folgendes gilt:

(i)

$$\begin{array}{ccc} SU(q_1)_{K_{sep}} & \xrightarrow{f_{1E_1}} & SU(f_1(q_1))_{K_{sep}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ SU(q_1 \perp q_2)_{K_{sep}} & \xrightarrow{f_E} & SU(f_1(q_1) \perp f_2(q_2))_{K_{sep}} \end{array}$$

ist kommutativ.

(ii) Für den Homomorphismus

$$\psi : \mathrm{Spin}\, f_1(q_1)_{K_{sep}} \to \mathrm{Spin}\,(f_1(q_1) \perp f_2(q_2))_{K_{sep}}$$

gilt:

$$\alpha({}^{s}f \circ f^{-1}) \circ \psi = \psi \circ \alpha({}^{s}f_1 \circ f_1^{-1}) .$$

Durch

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}\,(q_1)_{K_{sep}} & \xleftarrow{\alpha(f_1)} & \mathrm{Spin}\,(f_1(q_1))_{K_{sep}} \\ \vdots & & \downarrow \\ \mathrm{Spin}(q_1 \perp q_2)_{K_{sep}} & \xleftarrow{\alpha(f)} & \mathrm{Spin}(f_1(q_1) \perp f_2(q_2))_{K_{sep}} \end{array}$$

wird ein Gruppenhomomorphismus χ erklärt. Man hat

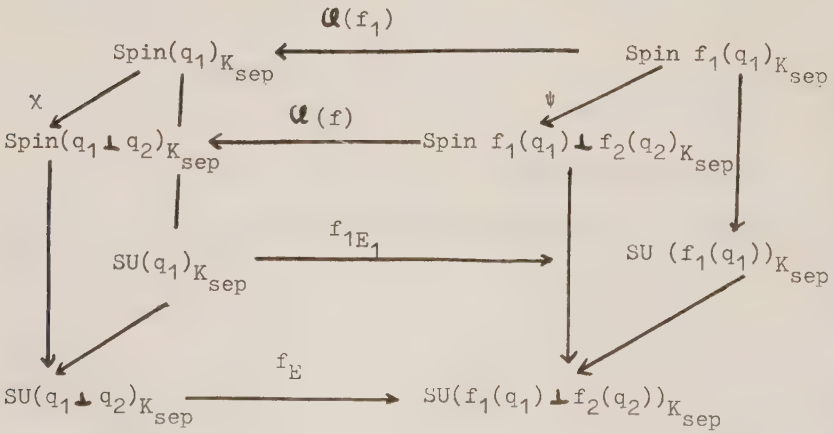
Lemma 5: Der Homomorphismus χ ist über K definiert

und

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spin}(q_1)_{K_{sep}} & \xrightarrow{\chi} & \mathrm{Spin}(q_1 \perp q_2)_{K_{sep}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{SU}(q_1)_{K_{sep}} & \longrightarrow & \mathrm{SU}(q_1 \perp q_2)_{K_{sep}} \end{array}$$

ist kommutativ.

Beweis: Für $s \in \mathrm{Gal}\,(K_{sep}/K)$ ist ${}^s\chi = \chi$ wegen (ii) und die behauptete Kommutativität ergibt sich mit (i) aus dem folgenden Diagramm:



§ 6 Die Klasse von D in der Brauergruppe

Für später wird hier eine Beschreibung der Klasse $|D|$ der Divisionsalgebra D in der Brauergruppe von K durch Kozykel angegeben. Dabei wird wieder $\dim_K D > 1$ vorausgesetzt, die übrigen Bezeichnungen sind die von § 4, 4.2.

Der zu dem Zerfällungsmorphismus f gehörige Algebrenisomorphismus $f_E : {}_{K_{sep}}E \to {}_{K_{sep}}E_1 \cong \mathrm{End}_{K_{sep}}(V_1 \otimes K_{sep})$ ist über einer endlichen galoisschen Erweiterung L von K definiert, deshalb ist die Abbildung $s \mapsto p_s := f_E \cdot {}^s f_E^{-1} \in \mathrm{Aut}({}_{K_{sep}}E_1)$ konstant auf den Restklassen von $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_{sep}/K)$ nach $\Gamma_L := \mathrm{Gal}(K_{sep}/L)$ und läßt sich faktorisieren in der Form

$$\Gamma \to {}^{\Gamma}/_{\Gamma_L} \to \mathrm{Aut}({}_{K_{sep}}E_1) .$$

Versieht man $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_{sep}/K)$ mit der Krulltopologie [G], $\mathrm{Aut}({}_{K_{sep}}E_1) = \mathrm{PGL}({}_{K_{sep}}E_1)$ mit der diskreten Topologie, so ist $\mathrm{PGL}({}_{K_{sep}}E_1)$ diskrete Γ-Gruppe und p_s ist stetiger Kozykel von Γ mit Werten in $\mathrm{PGL}({}_{K_{sep}}E_1)$. Man kann $\alpha_s \in {}_{K_{sep}}E_1$ so wählen, daß für $e \in {}_{K_{sep}}E_1$, $s \in \Gamma$

$$f_E \cdot {}^s f_E^{-1}(e) = \alpha_s \cdot e \cdot \alpha_s^{-1} \quad \text{ist und } s \mapsto \alpha_s$$

sich folgendermaßen faktorisieren läßt

$$\Gamma \to {}^{\Gamma}/_{\Gamma_L} \to {}_{K_{sep}}E_1 .$$

Die exakte Sequenz

$$1 \to K_{sep}^* \to GL(\kappa_{sep} E_1) \to P GL(\kappa_{sep} E_1) \to 1$$

definiert eine Abbildung

$$\Delta : H^1(\Gamma, P GL(\kappa_{sep} E_1)) \to H^2(\Gamma, K_{sep}^*),$$

dabei entspricht dem Bild der Klasse des 1-Kozykels $\{p_s\}$ unter Δ die Klasse $|D|$ der Divisionsalgebra D in der Brauergruppe $Br(K) \cong H^2(\Gamma, K_{sep}^*)$ (vgl. [S$_2$] S. 166). Nach Definition von Δ ist $\Delta((p_s))$ die Klasse des durch

$$\beta_{s,t} := \alpha_s \, {}^s\alpha_t \, \alpha_{st}^{-1} \qquad (s, t \in \Gamma)$$

gegebenen 2-Kozykels, so daß also $|D| = (\beta_{s,t})$ wird.

Für beliebiges $v \in V_1 \otimes K_{sep}$ hat man

$$(2) \qquad \beta_{s,t} \, \alpha_{st}(v) = \alpha_s \, {}^s\alpha_t \, (v) .$$

Ist speziell char $K \neq 2$, kann man nach § 1 Lemma 1 $\alpha_s \in U(f(q))_{K_{sep}}$ wählen und dann induziert α_s^{-1} auf der zweiten Cliffordalgebra gerade den Automorphismus $\alpha(f \cdot {}^s f^{-1})$.

§ 7 Die Invariante $c(q_1, q_2)$

7.1)

In diesem Abschnitt wird die bereits in der Einleitung erwähnte Gleichung $c_1 \cdot c_2 = |D|$ bewiesen. Dazu wird jetzt für den Rest des Paragraphen 7 Char $K \neq 2$ vorausgesetzt, so daß insbesondere die Gruppe der zweiten Einheitswurzeln $\mu_2(K)$ mit $\mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ identifiziert werden kann.

D, δ, V und $\mathfrak{B} = (B, E, \pi)$ seien wie in § 4, 4.2 und q sei feste nichtausgeartete quadratische Form in $\mathfrak{B}$. $f = (f_B, f_E)$ ist wieder Zerfällungsmorphismus (vgl. § 4, 4.2). Als bekannt vorausgesetzt werden hier die Grundtatsachen der Galoiskohomologie, dazu vergleiche man die Literaturzitate [S_1] , [S_2] , [K] und [H] .

Die exakte Sequenz

$$1 \to SU(q)_{K_{sep}} \to U(q)_{K_{sep}} \to \mathbb{Z}_2 \to 1$$

ergibt die exakte Kohomologiesequenz

$$1 \to SU(q)_K \to U(q)_K \to \mathbb{Z}_2 \to H^1(K, SU(q)) \to H^1(K, U(q)) \to$$

$$\to H^1(K, \mathbb{Z}_2) \cong K^*/K^{*2} \quad .$$

Da D über K nicht zerfällt, ist $SU(q)_K = U(q)_K$ ([K] S. 42) und damit ist $\mathbb{Z}_2 \to H^1(K, SU(q))$ injektiv, die Abbildung

$$H^1(K, SU(q)) \to H^1(K, U(q)) \text{ hat also den Kern } \mathbb{Z}_2$$

und deswegen enthält auch jede Faser von g genau zwei Elemente ($[S_1]$ I - 64).

Sind $a_1 = (a_s')$, $a_2 = (a_s'') \in H^1(K, SU(q))$ mit $a_1 \neq a_2$ und $g(a_1) = g(a_2) = (a_s) \in H^1(K, U(q))$, so gibt es ein $a \in U(q)_{K_{sep}}$, $a \notin SU(q)_{K_{sep}}$ mit

$$(3) \qquad a_s' = a^{-1} \; a_s'' \; {}^s a$$

Indem man nötigenfalls a_s' durch einen äquivalenten Kozykel ersetzt, kann man der Einfachheit wegen noch ohne Einschränkung annehmen, daß $f_E(a) \in U(f(q))_{K_{sep}}$ Spiegelung ist (zu f_E vgl. § 4, 4.2).
Nach § 4 Satz 2 hat man

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Spin}(q)_{K_{sep}} \to SU(q)_{K_{sep}} \to 1$$

und man kann a_s', a_s'' hochheben zu b_s', $b_s'' \in \mathrm{Spin}(q)_{K_{sep}}$, die weiter stetig von s abhängen. Mit

$$c_1 := (b_s' \; {}^s b_t' \; b_{st}'^{-1}) \in H^2(K, \mathbb{Z}_2)$$

$$c_2 := (b_s'' \; {}^s b_t \; b_{st}''^{-1}) \in H^2(K, \mathbb{Z}_2) \qquad \text{hat}$$

man zu den Kohomologieklassen a_1, a_2 Elemente c_1 und c_2 in der Brauergruppe von K gefunden. Es gilt der

Satz 3: $\qquad c_1 \cdot c_2 = |D|$

Beweis: Es ist $\delta_{s,t} := b_s' \; {}^s b_t' \; b_{st}'^{-1} \cdot b_s'' \; {}^s b_t'' \; b_{st}''^{-1}$

zu berechnen, und da $\delta_{s,t} = \alpha(f)^{-1} \; \delta_{s,t}$ ist, liegt es nahe, mit Hilfe des Zerfällungsmorphismus f zu den leichter zugänglichen Gruppen SU (f(q)) bzw. Spin (f(q)) überzugehen.

Da $f_E(a) \in U(f(q))_{K_{sep}}$ Spiegelung ist, gibt es ein $b \in V_1 \otimes K_{sep} \subseteq C(f(q))$ mit

$$f_E(a)\, v = -b \cdot v \cdot b^{-1} \qquad \text{für } v \in V_1 \otimes K_{sep} ,$$

die Multiplikation ist die in der Cliffordalgebra C (f(q)) (zu V_1 vgl. § 4, 4.2). Mit den Bezeichnungen von § 6 hat man für $s \in Gal(K_{sep}/K)$ $\alpha_s \in U(f(q))_{K_{sep}}$, so daß gilt:

$$f_E({}^s a) = f_E \cdot s \cdot f_E^{-1} \cdot f_E(a) = f_E \cdot {}^s f_E^{-1} \cdot s \; (f_E(a)) =$$

$$= \alpha_s \cdot {}^s(f_E(a)) \cdot \alpha_s^{-1} . \qquad \text{Wegen}$$

$${}^s(f_E(a))(v) = s(-b \cdot s^{-1} v \cdot b^{-1}) = - {}^s b \cdot v \cdot {}^s b^{-1} \qquad \text{folgt:}$$

$$f_E({}^s a)\,(v) = - \alpha_s ({}^s b \cdot \alpha_s^{-1}(v) \cdot {}^s b^{-1}) = - \alpha_s ({}^s b) \cdot v \cdot \alpha_s ({}^s b)^{-1} .$$

Mit Gleichung (3) hat man dann weiter

$$(4) \qquad f_E(a_s')\, v = b^{-1} \cdot (f_E(a_s'')\,(\alpha_s ({}^s b) \cdot v \cdot \alpha_s ({}^s b)^{-1})) \cdot b .$$

Nach Definition von b_s' bzw. b_s'' liegt $\alpha(f)^{-1}(b_s')$ bzw. $\alpha(f)^{-1}(b_s'') \in Spin(f(q))_{K_{sep}}$ über $f_E(a_s')$ bzw. $f_E(a_s'')$

und daher gilt für $v \in V_1 \otimes K_{sep}$:

$$(5)\quad \begin{cases} f_E(a_s')\, v = \mathcal{A}(f)^{-1}\, b_s' \cdot v \cdot (\mathcal{A}(f)^{-1}\, b_s')^{-1} \\ f_E(a_s'')\, v = \mathcal{A}(f)^{-1}\, b_s'' \cdot v \cdot (\mathcal{A}(f)^{-1}\, b_s'')^{-1} . \end{cases}$$

Nach Gleichung (4) hat man

$$f_E(a_s')\, v = (b^{-1} \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}(b_s'') \cdot \alpha_s({}^s b)) \cdot v \cdot (b^{-1} \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}(b_s'') \cdot \alpha_s({}^s b))^{-1}$$

und deswegen gibt es genau ein $\eta_s \in K_{sep}^*$ mit

$$(6)\qquad \mathcal{A}(f)^{-1}\, b_s' = \eta_s \cdot b^{-1} \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}(b_s'') \cdot \alpha_s({}^s b) ,$$

η_s hängt offenbar stetig von s ab. Es ist jetzt

$$\delta_{s,t} = \mathcal{A}(f)^{-1}\delta_{s,t} = \mathcal{A}(f)^{-1}(b_s') \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}({}^s b_t') \cdot (\mathcal{A}(f)^{-1}\, b_{st}')^{-1} \cdot$$

$$\cdot\ \mathcal{A}(f)^{-1}(b_s'' \cdot {}^s b_t'' \cdot b_{st}''^{-1})$$

und wegen

$$\mathcal{A}(f)^{-1}({}^s b_t') = \mathcal{A}(f)^{-1} \cdot s \cdot \mathcal{A}(f) \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}(b_t') =$$

$$= \mathcal{A}(f)^{-1} \cdot {}^s\mathcal{A}(f) \cdot s \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}(b_t') = \mathcal{A}(f \cdot {}^s f^{-1})^{-1} \cdot s \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}(b_t')$$

ergibt sich mit § 6 Gleichung (2) nach Gleichung (6) :

$$\mathcal{A}(f)^{-1}({}^s b_t') = \mathcal{A}(f \cdot {}^s f^{-1})^{-1}({}^s\eta_t \cdot {}^s b^{-1} \cdot {}^s(\mathcal{A}(f)^{-1}(b_t'')) \cdot {}^s(\alpha_t({}^t b))) =$$

$$= {}^s\eta_t \cdot \alpha_s({}^s b)^{-1} \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}({}^s b_t'') \cdot \alpha_s({}^s(\alpha_t({}^t b))) =$$

$$= {}^s\eta_t \cdot \alpha_s({}^s b)^{-1} \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}({}^s b_t'') \cdot \zeta_{s,t} \cdot \alpha_{st}({}^{st} b) .$$

Damit ergibt sich dann schließlich:

$$\delta_{s,t} = \eta_s \cdot (b^{-1}\, \mathcal{A}(f)^{-1}(b''_s)\, \alpha_s({}^s b)) \cdot {}^s\eta_t \cdot (\alpha_s({}^s b)^{-1} \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}({}^s b''_t) \cdot$$

$$\cdot \varsigma_{s,t} \cdot \alpha_{st}({}^{st} b)) \cdot \eta_{st}^{-1}\, (\alpha_{st}({}^{st} b)^{-1} \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}\, (b''_{st})^{-1} \cdot b) \cdot$$

$$\cdot \mathcal{A}(f)^{-1}(b''_s\ {}^s b''_t\ b''^{-1}_{st}) = \varsigma_{s,t} \eta_s \cdot {}^s\eta_t \cdot \eta_{st}^{-1} \cdot b^{-1} \cdot$$

$$\cdot b^{-1}(b''_s\ {}^s b''_t\ b''^{-1}_{st}) \cdot b \cdot \mathcal{A}(f)^{-1}\, (b''_s\ {}^s b''_t\ b''^{-1}_{st}) = \varsigma_{s,t}\ \eta_s\ {}^s\eta_t\ \eta_{st}^{-1}$$

und da nach § 6 ($\varsigma_{s,t}$) = $|D| \in Br(K)$ ist, ist die Behauptung von Satz 3 vollständig bewiesen.

7.2)

Sind (V_1, q_1) und (V_2, q_2) Räume mit nichtausgearteten quadratischen Formen gleicher Dimension über D, dann gibt es endliche galoissche Erweiterungen L von K, so daß ein $D \otimes_K L$-Modulisomorphismus $\varphi : V_1 \otimes_K L \to V_2 \otimes_K L$ existiert mit $\varphi(q_1) = q_2$. Für $s \in Gal(L/K)$ wird durch $a_s := \varphi^{-1} \cdot {}^s\varphi$ auf Gal (L/K) ein Kozykel mit Werten in $U(q_1)_L$ definiert und die durch a_s in $H^1(Gal(L/K), U(q_1)_L)$ bestimmte Kohomologieklasse ist unabhängig von der speziellen Wahl des Isomorphismus φ. Es ist bekannt, daß so den D-Isomorphieklassen der Räume (V_2, q_2) mit nichtausgeartetem q_2 fester Dimension umkehrbar eindeutig Kohomologieklassen in

$$H^1(K, U(q_1)) = H^1(Gal(K_{sep})K), U(q_1)_{K_{sep}}) =$$

$$= \varinjlim_{L/K \text{ endlich galoissch}} H^1(Gal(L/K), U(q)_L)$$

entsprechen.

Für $b \in B_1 = \text{Seq}_{\delta} V_1$ und eine D-Basis $\{v_i\}_{i \in I}$ von V_1 bezeichne Nrd $(b(v_i, v_j))$ die reduzierte Norm der Matrix $(b(v_i, v_j))$. Die durch $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ Nrd $(b(v_i, v_j))$ gegebene Quadratklasse d(b) in $K^*/K^{*2} \cup \{0\}$ heißt Diskriminante von b (vgl. die gleichwertige Definition in [T] S. 27).

Als Diskriminante der quadratischen Form $q_1 = \bar{q}_1 + A_1$ wird $d(q_1) := d(\bar{q}_1 + \mathfrak{r}(\bar{q}_1))$ definiert. Die durch die Sequenz

$$1 \to SU(q_1)_{K_{sep}} \to U(q_1)_{K_{sep}} \to \mathbb{Z}_2 \to 1$$

definierte Abbildung $H^1(K, U(q_1)) \to H^1(K, \mathbb{Z}_2) \cong K^*/K^{*2}$ bildet die durch die Isomorphieklasse von (V_2, q_2) gegebene Kohomologieklasse auf die Klasse des Quotienten der Diskriminanten von q_1 und q_2 ab ([K] S. 45). Jede nichtausgeartete quadratische Form q_2 mit gleicher Dimension und Diskriminante wie q_1 bestimmt dann nach Satz 3 eine Invariante $c = c(q_1, q_2)$ in $H^2(K, \mathbb{Z}_2)/(|D|)$, $c(q_1, q_2)$ hängt dabei nur von den Isomorphieklassen der Räume (V_1, q_1) bzw. (V_2, q_2) ab.

Für $\alpha, \beta \in K^*$ bezeichne wie in [O] (α, β) die durch α, β bestimmte Quaternionenalgebra über K und $[\alpha, \beta]$ die durch (α, β) in Br (K) gegebene Klasse. Mit diesen Bezeichnungen gilt folgender

Satz 4 : Unter der Voraussetzung, daß bei (i) bis (iv) die jeweiligen Invarianten überhaupt definiert sind, d.h. daß die jeweiligen Formen gleiche Dimension und Diskriminante haben, gelten folgende Rechenregeln:

(i) $c(q_1, q_2)^2 = 1$

(ii) $c(q_1, q_2) = c(q_2, q_1)$

(iii) $c(q_1, q_2)\, c(q_2, q_3) = c(q_1, q_3)$

(iv) $c(q_1 \perp q_3, q_2 \perp q_3) = c(q_1, q_2)$

(v) $c(q, k\,q) = [k,d] \bmod |D|$ für $k \in K^*$ und $d \in d(q)$.

(zu (iii) vgl. auch [A] sowie [Sp]).

Beweis: (i) ist unmittelbar klar, (ii) folgt mit (i) und (iii), und (iv) ergibt sich mit § 5 Lemma 5. Nachzuprüfen bleiben (iii) und (v).

Zu (iii):

V_i seien die zu q_i gehörigen D-Vektorräume und $\mathfrak{B}_i$ die zugehörigen Räume von Bilinearformen über K (i = 1,2,3).

$\varphi : (V_1 \otimes K_{sep}, q_1) \longrightarrow (V_2 \otimes K_{sep}, q_2)$ und

$\psi : (V_1 \otimes K_{sep}, q_1) \longrightarrow (V_3 \otimes K_{sep}, q_3)$ seien über einer endlichen galoisschen Erweiterung von K definierte Isomorphismen. Dann ist auch

$$\psi \circ \varphi^{-1} : (V_2 \otimes K_{sep}, q_2) \longrightarrow (V_3 \otimes K_{sep}, q_3)$$

Isomorphismus und die durch q_2, q_3 in $H^1(K, U(q_1))$ definierten Kohomologieklassen a_2, a_3 werden durch die Kozykel

$$(a_2)_s := \omega^{-1} \circ {}^s\omega \qquad (a_3)_s := \psi^{-1} \circ {}^s\psi$$

gegeben. Zu q_3 gehört in $H^1(K, U(q_2))$ die durch den Kozykel

$$a_s = (\psi \circ \omega^{-1})^{-1} \cdot {}^s(\psi \circ \omega^{-1}) = \omega \cdot((a_3)_s \cdot (a_2)_s^{-1}) \circ \omega^{-1}$$

definierte Klasse a. ω induziert einen Morphismus

$$\phi : K_{sep}^{\mathfrak{B}_2} \longrightarrow K_{sep}^{\mathfrak{B}_1} \quad , \text{ so daß}$$

$a_s = \phi_E^{-1}((a_3)_s \cdot (a_2)_s^{-1})$ wird. q_1, q_2, q_3 haben gleiche Dimension und Diskriminante, $(a_3)_s$, $(a_2)_s$ bzw. a_s sind daher Elemente von $SU(q_1)_{K_{sep}}$ bzw. $SU(q_2)_{K_{sep}}$.

Liegen $(c_2)_s$, $(c_3)_s \in \text{Spin}(q_1)_{K_{sep}}$ über $(a_2)_s$, $(a_3)_s$, so

liegt $c_s := \alpha(\phi)((c_3)_s \cdot (c_2)_s^{-1} \in \text{Spin}(q_2)_{K_{sep}}$ über

$a_s = \phi_E^{-1}((a_3)_s \cdot (a_2)_s^{-1})$ nach § 4, 4.2 Satz 2 (ii) ;

und mit $(c_2)_s$, $(c_3)_s$ ist auch c_s stetige Funktion von s.

Behauptung (iii) wird jedenfalls dann bewiesen sein, wenn man zeigt, daß die durch

$$c_s \, {}^s c_t \, c_{st}^{-1} \qquad \text{bzw.}$$

$$(c_3)_s \, {}^s(c_3)_t \, (c_3)_{st}^{-1} \cdot ((c_2)_s \, {}^s(c_2)_t \, (c_2)_{st}^{-1})^{-1}$$

in $H^2(K, \mathbb{Z}_2)$ definierten Kohomologieklassen übereinstimmen.

Nach § 4, 4.2 Lemma 4 ist $\alpha({}^s\phi \cdot \phi^{-1})$ innerer Automorphismus mit dem Element $(c_2)_s \in \mathrm{Spin}\,(q_1)_{K_{sep}}$, deswegen gilt:

$$ {}^s c_t = {}^s(\alpha(\phi)((c_3)_t \cdot (c_2)_t^{-1})) = \alpha(\phi) \cdot \alpha({}^s\phi \cdot \phi^{-1})({}^s(c_3)_t \cdot {}^s(c_2)_t^{-1}) = $$

$$ = \alpha(\phi)\ ((c_2)_s \cdot {}^s(c_3)_t \cdot {}^s(c_2)_t^{-1} \cdot (c_2)_s^{-1}) \qquad \text{und damit} $$

hat man dann

$$ c_s\ {}^s c_t\ c_{st}^{-1} = \alpha(\phi)((c_3)_s (c_2)_s^{-1} (c_2)_s\ {}^s(c_3)_t\ {}^s(c_2)_t^{-1}\ (c_2)_s^{-1}((c_3)_{st} \cdot (c_2)_{st}^{-1})^{-1}) = $$

$$ = \alpha(\phi)\ ((c_3)_s \cdot {}^s(c_3)_t \cdot ({}^s(c_2)_t^{-1} \cdot (c_2)_s^{-1} \cdot (c_2)_{st}) \cdot (c_3)_{st}^{-1}) = $$

$$ = \alpha(\phi)\ ((c_3)_s\ {}^s(c_3)_t\ (c_3)_{st}^{-1} \cdot ((c_2)_s\ {}^s(c_2)_t\ (c_2)_{st}^{-1})^{-1}) $$

und das beweist (iii).

Zu (v):

Mit $\omega : V \otimes K_{sep} \to V \otimes K_{sep} \quad \omega(x) := (k)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$

gilt $\omega(q) = k \cdot q$ und zu (V, kq) gehört die durch den 1-Kozykel

$$ a_s = \omega^{-1} \cdot {}^s\omega = (k)^{\frac{1}{2}} \cdot {}^s((k)^{-\frac{1}{2}}) \qquad s \in \mathrm{Gal}\,(K_{sep}/K) $$

gegebene Kohomologieklasse a in $H^1(K, U(q))$. Für $s \in \mathrm{Gal}(K_{sep}/K)$ wird $\varepsilon(s) \in \{0,1\}$ durch ${}^s((k)^{\frac{1}{2}}) = (-1)^{\varepsilon(s)}\ (k)^{\frac{1}{2}}$ definiert.

Es genügt, den 1-Kozykel $(-1)^{\varepsilon(s)} \in SU(q)_{K_{sep}}$ hochzuheben zu $c_s \in \mathrm{Spin}\,(q)_{K_{sep}}$ und die Klasse von $c_s \cdot {}^s c_t \cdot c_{st}^{-1}$ in

$H^2(K,Z_2)/(|D|)$ zu berechnen. Liegt $c \in \mathrm{Spin}(q)_{K_{sep}}$ über $-1 \in SU(q)_{K_{sep}}$, so ist notwendig $c^2 = \pm 1$, c Element von $Z(\mathcal{C}(_{K_{sep}} q))$, des Zentrums von $\mathcal{C}(_{K_{sep}} q)$, und es ist $c \notin K_{sep}$. Ist d Repräsentant der Restklasse d (q), so gibt es nach [T] (Korollar zu Theorem 3) $z \in \mathcal{C}(_{K_{sep}} q)$, so daß gilt:

$$Z(\mathcal{C}(_{K_{sep}} q)) = K_{sep} \cdot 1 + K_{sep} \cdot z \qquad \text{und:}$$

z ist rational über K, und: $z^2 = d$.

Daher gibt es ein $l \in K_{sep}$ mit $c = l \cdot z$. l kann genauer bestimmt werden:

Ist wie in § 4, 4.2 f geeigneter Zerfällungsmorphismus zu q und bezeichnet $\tau : C(f(q)) \to C(f(q))$ den kanonischen Antiautomorphismus auf der Cliffordalgebra C(f(q)), so folgt wegen

$$(\mathcal{C}(f)^{-1}c) \cdot \tau(\mathcal{C}(f)^{-1}c) = 1$$

und

$$\tau(\mathcal{C}(f)^{-1}z) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathcal{C}(f)^{-1}z \qquad \text{schließlich:}$$

$$1 = l^2 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d .$$

Für $s \in \mathrm{Gal}(K_{sep}/K)$ wird $u(s) \in \{0,1\}$ definiert durch

$$^s l = (-1)^{u(s)} l \quad ,$$

l ist dabei eine der beiden Quadratwurzeln von $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d^{-1}$.

Mit

$$c_s := \begin{cases} 1 & \varepsilon(s) = 0 \\ 1 \cdot z & \text{falls} \quad \varepsilon(s) = 1 \end{cases}$$

ist dann

$$c_s \, {}^s c_t \, c_{st}^{-1} = (-1)^{\mu(s)\cdot\varepsilon(t)} \, (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon(s)\cdot\varepsilon(t)}$$

und damit hat man nach [Sp] (S. 25o/251) sowie [O] (S. 147)

$$c(q,kq) = \left[(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} d, k\right]\left[k, -(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} k\right] =$$

$$= \left[k, -dk\right] = \left[k,d\right] \qquad \text{mod } |D|, \text{ w.z.z.w.}$$

Eine Invariante auf der Wittgruppe von (D, δ) läßt sich mit Regel (iv) von Satz 4 folgendermaßen konstruieren: K_m bezeichne die Menge derjenigen $d \in K^*/K^{*2}$, für die ein m-dimensionaler Raum (V, q) über D mit nichtausgeartetem q und Diskriminante $d(q) = d$ existiert. Ist ε wie in § 1 Beispiel, so wird mit $\left\langle \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{smallmatrix} \right\rangle$ im folgenden der Raum $D \oplus D$ mit der durch die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bezüglich der Basis $\{(1,0), (0,1)\}$ auf $D \oplus D$ definierten π-symmetrischen nichtausgearteten Sesquilinearform bezeichnet. Mit diesen Bezeichnungen wähle man sich dann für $m = 1,2$ und jedes $d \in K_m$ Formen $q_{m,d}$ der Dimension m über D und Diskriminante d; $q_{2,1}$ sei dabei die durch $\left\langle \begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{smallmatrix} \right\rangle$ gegebene Form.

Ist $m > 2$ und $d \in K_m$, so werde

$$q_{m,d} := q_{m-2,d} \perp \left\langle \begin{matrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{matrix} \right\rangle \text{ gesetzt, falls } d \in K_{m-2},$$

im anderen Fall sei $q_{m,d}$ beliebig nichtausgeartet mit Dimension m und Diskriminante d.
Ist dann q irgendeine nichtausgeartete Form mit zugrundeliegendem D-Vektorraum V der Dimension m und $d = d(q)$, so definiere

$$c(q) := c(q_{m,d}, q)$$

c(q) hängt dann nur vom Typ von (V, q) in der Wittgruppe ab. Diese Konstruktion ist allerdings deswegen nicht sehr befriedigend, weil die Auswahl der $q_{m,d}$ willkürlich und in keiner Weise kanonisch vor sich geht.

§ 8 Schiefhermitesche Formen über algebraischen Zahlkörpern

In diesem Paragraphen wird K als algebraischer Zahlkörper vorausgesetzt, so daß für $\dim_K D > 1$ D verallgemeinerte Quaternionenalgebra über K ist. $\delta : D \to D$ sei die Standardinvolution auf D, dann ist $\varepsilon = -1$ und die π-symmetrischen Elemente von $\mathfrak{B} = \mathrm{Sesq}_\delta V$ sind genau die schiefhermiteschen Sesquilinearformen auf dem D-Vektorraum V. Mit K_v wird die zur Primstelle v gehörige Komplettierung von K bezeichnet, ferner sei $D_v = D \otimes_K K_v$. Die übrigen Bezeichnungen sind wie in § 7, nur schreiben wir hier jeweils $h = \overline{h} + A$ anstelle

von $q = \bar{q} + A$ um hervorzuheben, daß es sich um schiefhermitesche Formen über D handelt.

8.1)

Ist $D_v \cong M_2(K_v)$ so ist $SU(h)_{K_v} \neq U(h)_{K_v}$ und daher ist die in der Sequenz

$$1 \to SU(h)_{K_v} \to U(h)_{K_v} \to \mathbb{Z}_2 \to H^1(K_v, SU(h)) \to H^1(K_v, U(h))$$

auftretende Abbildung $H^1(K_v, SU(h)) \to H^1(K_v, U(h))$ injektiv.

Bezeichnet S die Menge der Primstellen, an denen D nicht zerfällt, so hat man folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \to & \mathbb{Z}_2 & \to & H^1(K, SU(h)) & \xrightarrow{g_3} & H^1(K, U(h)) & \to & H^1(K, \mathbb{Z}_2) \\
 & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_1} & & \downarrow{\scriptstyle g_4} & & \downarrow \\
1 & \to & \prod_{v \in S} \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{u} & \prod_v H^1(K_v, SU(h)) & \xrightarrow{g_2} & \prod_v H^1(K_v, U(h)) & \to & \prod_v H^1(K_v, \mathbb{Z}_2)
\end{array}$$

Bekannt ist: Für die algebraische Gruppe U(h) gilt nicht das Hasse-Prinzip, d.h. g_4 ist nicht injektiv, genauer gilt:

$$(7) \qquad \# \operatorname{Ker} g_4 = 2^{s-2} \quad \text{mit} \quad s := \# S$$

([K] S.138 und S. 150).

Gleichung (7) soll hier unter Benutzung von § 7 Satz 3 und Satz 4 Regel (iv) und (v) in Anlehnung an [K] bewiesen werden:

Wegen

$$\operatorname{Ker} g_4 \tilde{=} \operatorname{Ker}(g_4 \circ g_3)/\mathbb{Z}_2 = \operatorname{Ker}(g_2 \circ g_1)/\mathbb{Z}_2 = g_1^{-1}(\operatorname{Im} u)/\mathbb{Z}_2$$

ist

$$(8) \qquad \# g_1^{-1}(\operatorname{Im} u) = 2 \# \operatorname{Ker} g_4 .$$

Nach Definition von u besteht Im u gerade aus den Elementen $(x_v) \in \prod_v H^1(K_v, SU(h))$, deren v-Komponenten x_v für $v \in S$ von der Form $b_v^{-1} \cdot {}^s b_v$ mit $b_v \in U(h)_{K_v \text{ sep}}$ und $x_v = 1$ für $v \notin S$ sind. Ist $b_v \notin SU(h)_{K_v \text{ sep}}$, so wird nach § 7 Satz 3 die Klasse von $\{b_v^{-1} \cdot {}^s b_v\}$ vermöge $H^1(K_v, SU(h)) \to H^2(K_v, \mathbb{Z}_2)$ auf die Klasse von $|D_v|$ in $H^2(K_v, \mathbb{Z}_2)$ abgebildet. Der Kern der Abbildung

$$\prod_v H^2(K_v, Z_2) \to \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}_2)/(|D_v|)$$ stimmt daher mit dem Bild von Im u unter der Abbildung $\prod_v H^1(K_v, SU(h)) \to \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}_2)$ überein. Mit den Bezeichnungen des folgenden Diagramms

$$(9) \qquad \begin{array}{ccccccc} H^1(K,\mathrm{Spin}(h)) & \to & H^1(K,SU(h)) & \xrightarrow{w_1} & H^2(K,\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{f_3} & H^2(K,\mathbb{Z}_2)/(|D|) \\ \downarrow & & \downarrow g_1 & & \downarrow f_1 & & \downarrow f_4 \\ \prod_v H^1(K_v,\mathrm{Spin}(h)) & \to & \prod_v H^1(K_v,SU(h)) & \xrightarrow{w_2} & \prod_v H^2(K_v,\mathbb{Z}_2) & \xrightarrow{f_2} & \prod_v H^2(K_v,\mathbb{Z}_2)/(|D_v|) \end{array}$$

hat man also

$$(10) \qquad \operatorname{Ker} f_2 = w_2 \operatorname{Im} u$$

und aus Anzahlgründen ist insbesondere w_2 auf Im u injektiv. Deswegen und weil g_1 injektiv ist nach [K], gilt:

$\# g_1^{-1}(\mathrm{Im}\ u) = \# g_1(g_1^{-1}\ \mathrm{Im}\ u) = \# w_2\ g_1\ (g_1^{-1}\ \mathrm{Im}\ u) =$

$= \# f_1\ w_1\ (g_1^{-1}\ \mathrm{Im}\ u) = \# w_1\ g_1^{-1}\ \mathrm{Im}\ u.$

Da nach Gleichung (10) $f_1\ w_1\ g_1^{-1}\ \mathrm{Im}\ u \subseteq \mathrm{Ker}\ f_2$ also

$w_1\ g_1^{-1}\ \mathrm{Im}\ u \subseteq \mathrm{Ker}\ f_2 \cdot f_1$ ist, hat man

$\# w_1\ g_1^{-1}\ \mathrm{Im}\ u \leq \# \mathrm{Ker}\ f_2 \cdot f_1 = 2^{s-1}$ und deswegen

ist zunächst $\# g_1^{-1}\ (\mathrm{Im}\ u) \leq 2^{s-1}$ oder nach Gleichung (8):

(11) $\qquad \# \mathrm{Ker}\ g_4 \leq 2^{s-2}$.

Falls $s > 2$ ist, schreibe man für den Nachweis von $\# \mathrm{Ker}\ g_4 \geq 2^{s-2}$ das π-symmetrische Element $\bar{h}$ der Restklasse h in der Form $\bar{h}_1 \perp \bar{h}_2$ mit π-symmetrischen $\bar{h}_i$ und $\bar{h}_1$ von der Dimension 1 über D. h_i seien die durch $\bar{h}_i$ bestimmten Formen. Insbesondere ist $(\bar{h}_1)^\delta = -\bar{h}_1$.

$H^2(K_v, \mathbb{Z}_2)$ kann mit der Gruppe $\{1, -1\} = \mathbb{Z}_2$ und $H^2(K, \mathbb{Z}_2)$ mit der Untergruppe der Elemente $\eta = (\eta_v) \in \prod_v \mathbb{Z}_2$ identifiziert werden, die durch

(i) $\qquad \eta_v = 1 \quad$ für fast alle v

(ii) $\qquad \prod_v \eta_v = 1 \quad$ gegeben wird.

Dann bezeichne $\eta_S \in \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}_2)$ das durch

$$\eta_{S,v} := \begin{cases} 1 & v \notin S \\ -1 & v \in S \end{cases}$$ definierte Tupel $(\eta_{S,v})$.

Es gibt 2^{s-2} Elemente $\epsilon_i = (\epsilon_{i,v}) \in \prod_v H^2(K_v, \mathbb{Z}_2)$

$i = 1,\ldots,2^{s-2}$ mit:

(i) $\epsilon_{i,v} = 1$ für $v \notin S$

(ii) $\prod_v \epsilon_{i,v} = 1$

(iii) $\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_{2^{s-2}}, \epsilon_1 \cdot \eta_S,\ldots,\epsilon_{2^{s-2}} \cdot \eta_S\} = \operatorname{Ker} f_4 \cdot f_3 =$

$= \operatorname{Ker} f_2 \cdot f_1$.

Ist dann $d := \bar{h}_1 \cdot \bar{h}_1 \in d(\bar{h}_1)$, so ist d an den Primstellen $v \in S$ kein Quadrat in K_v, $\bar{h}_1$ ist nämlich schiefsymmetrisches Quaternion und D_v zerfällt nicht für $v \in S$.

Wird mit $(.\ ,\ .)_v$ das Hilbertsche Normrestsymbol auf K_v bezeichnet, so gibt es zu den ϵ_i nach [O] (S. 203)

$k_i \in K^*$ mit $(k_i, d)_v = \epsilon_{i,v}$.

Dann ist nach § 7 Satz 4:

$c(h, k_i \cdot h_1 \perp h_2) = c(h_1 \perp h_2, k_i \cdot h_1 \perp h_2) = c(h_1, k_i \cdot h_1) =$

$= [k_i, d] \bmod |D|$, also für $j \neq i$:

$$c(h, k_i \cdot h_1 \perp h_2) \neq c(h, k_j \cdot h_1 \perp h_2).$$

Für den Beweis von $\#\mathrm{Ker}\, g_4 \geq 2^{s-2}$ genügt es nachzuprüfen, daß die durch die Formen $k_i \cdot h_1 \perp h_2$ in $H^1(K,U(h))$ definierten Kohomologieklassen im Kern von g_4 liegen.
Für $v \in S$ sind h und $k_i \cdot h_1 \perp h_2$ über D_v äquivalent, weil Dimension und Diskriminante übereinstimmen ([J] , [Ts]).
Für $v \notin S$ ist $(k_i, d)_v = 1$ und deswegen gibt es $x_1, x_2 \in K_v$ mit $k_i = x_1^2 - x_2^2 d$ und für $x = x_1 + x_2 \overline{h}_1 \in D_v$ hat man dann $x^{\delta} \cdot \overline{h}_1 \cdot x = k_i \cdot \overline{h}_1$ und damit sind h und $k_i h_1 \perp h_2$ auch über D_v $v \notin S$ äquivalent. Insgesamt folgt (7).

8.2)
Abschließend für diesen Paragraphen wird folgender Satz bewiesen, der die Klassifikation schiefhermitescher Formen über algebraischen Zahlkörpern behandelt:

Satz 5:

Sind h_1 , h_2 nichtausgeartete schiefhermitesche Formen gleicher Dimension und Diskriminante wie h und ist $c_1 = c(h, h_1) = c(h, h_2) = c_2$, dann gilt:
h_1 und h_2 sind genau dann über D isomorph, wenn h_1 und h_2 über D_v isomorph sind für alle unendlichen Primstellen v von K.

Beweis: Es ist nur zu zeigen: Sind h_1 und h_2 über D_v für alle unendlichen v isomorph, so auch schon über D. Sind a_1 bzw. $a_2 \in H^1(K, U(h))$ die h_1 bzw. h_2 entsprechenden Kohomologieklassen, und ist weiter

$$g_3^{-1}(a_1) = \{a_{11}, a_{12}\}$$

$$g_3^{-1}(a_2) = \{a_{21}, a_{22}\} \qquad (a_{ik} \in H^1(K,SU(h))$$

$$c_{ik} := w_1(a_{ik}) \qquad (i,k = 1,2) \quad ,$$

so hat man wegen $c_1 = c_2$ bei passender Numerierung:

$$c_{11} = c_{21} \qquad c_{12} = c_{22} \quad .$$

Damit folgt insbesondere $c_{11\,v} = c_{21\,v}$

$$c_{12\,v} = c_{22\,v} \quad ,$$

wenn c_{ikv} $(i,k = 1,2)$ das Bild von c_{ik} unter der Abbildung $H^2(K,\mathbb{Z}_2) \to H^2(K_v,\mathbb{Z}_2)$ bezeichnet. Da für alle endlichen v $H^1(K_v, \mathrm{Spin}(h)) = \{1\}$ ist nach [K], folgt damit nach (9):

$$a_{11\,v} = a_{21\,v}$$

$$a_{12\,v} = a_{22\,v} \qquad \text{für alle endlichen v, dabei}$$

ist a_{ikv} wieder Bild von a_{ik} unter der Abbildung $H^1(K,SU(h)) \to H^1(K_v,SU(h))$. Für die unendlichen v hat man zwei Fälle:

(i) $v \notin S$:

Dann ist $H^1(K_v, SU(h)) \to H^1(K_v, U(h))$ injektiv, und weil h_1 und h_2 nach Voraussetzung über D_v isomorph sind, folgt jetzt sogar: $a_{11\,v} = a_{21\,v} = a_{12\,v} = a_{22\,v}$.

(ii) $v \in S$:

Bezeichnet man wieder mit a_{iv} die Bilder der Kohomologieklassen a_i $(i = 1,2)$ unter der Abbildung $H^1(K, U(h)) \to H^1(K_v, U(h))$, so hat man nach Voraussetzung $a_{1\,v} = a_{2\,v}$ und deswegen ist zunächst $\{a_{11\,v}, a_{12\,v}\} = \{a_{21\,v}, a_{22\,v}\}$.

Weil jetzt c_{ikv} Bild von a_{ikv} unter der Abbildung $H^1(K_v, SU(h)) \to H^2(K_v, \mathbf{Z}_2)$ ist, hat man wegen

$$c_{11\,v} = c_{21\,v} \quad \text{und} \quad c_{11\,v} \cdot c_{12\,v} = |D_v| \neq 1$$

notwendig $a_{11\,v} = a_{21\,v}$ und damit auch $a_{12\,v} = a_{22\,v}$.

Weil $H^1(K, SU(h)) \to \prod_v H^1(K_v, SU(h))$ injektiv ist nach [K] , folgt so $a_{11} = a_{21}$, $a_{12} = a_{22}$ und deswegen ist $a_1 = a_2$ und Satz 5 bewiesen.

Literatur

[A] H.P. Allen: Hermitian forms I, Trans.Amer. Math.Soc. Vol. 138, 1969, 199-21o

[G] K.Gruenberg: Profinite groups, in: J.W.S. Cassels und A. Fröhlich: Algebraic Number Theory, London 1967, 166 - 127

[H] G. Harder: Bericht über neuere Resultate der Galoiskohomologie habeinfacher Gruppen, Jahresber. Deutsch.Math. Ver. 7o, 1968, 182-216

[J] N. Jacobson: Simple Lie algebras over a field of characteristic zero, Duke Math. J. 4, 1938, 534-551

[K] M. Kneser: Lectures on Galois cohomology of classical groups, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1969

[O] O.T. O'Meara: Introduction to quadratic forms, Berlin-Heidelberg-New York 1971

[S_1] J.P. Serre: Cohomologie galoisienne, Lecture Notes in Math. no 5, Berlin-Heidelberg-New York 1965

[S_2] J.P. Serre: Corps locaux, Paris 1968

[Sp] T.A. Springer: On the equivalence of quadratic forms, Indag.Math. 21, 1959, 241-253

[T] J.Tits: Formes quadratiques, groupes orthogonaux et algèbres de Clifford, Invent.Math. 5, 1968, 19-41

[Ts] T.Tsukamoto: On the local theory of quaternionic anti-hermitian forms, J.Math.Soc. Japan Vol. 13 No. 4, 1961, 387-400

Lebenslauf

Am 9.4.1948 wurde ich als zweites Kind des Predigers Theophil Bartels und seiner Ehefrau Elisabeth in Göttingen geboren. Nach vier Grundschuljahren (1954-1958) besuchte ich das altsprachliche Max-Planck-Gymnasium in Göttingen. Dort habe ich im September 1966 die Reifeprüfung abgelegt. Im Wintersemester 1966/67 begann ich mit dem Studium der Mathematik und Physik in Göttingen, wo ich auch Vordiplomprüfung (21.1o.1968) und Hauptdiplomprüfung (16.12.197o) im Hauptfach Mathematik absolvierte. Die Vorarbeiten zur Dissertation wurden durch Einberufung zum zivilen Ersatzdienst (12.8.1971) unterbrochen. Den Grundersatzdienst habe ich in der Göttinger Medizinischen Universitätsklinik abgeleistet. In diese Zeit fallen einige wissenschaftliche Veröffentlichungen über die quantitative Beschreibung von Antigen-Antikörperreaktionen. Seit Beginn des Jahres 1973 arbeite ich als wissenschaftlicher Assistent am Mathematischen Institut der hiesigen Universität.